世界少年奥林匹克数学竞赛（中国区）选拔赛地方晋级赛（A）答案

一、填空题（每题 8 分，共计 64 分）

1. $\frac{15}{2}$　　2. $x\leq-3$ 或 $x\geq1$　　3. $(2x+y)(2a-b)(x-3y)$　　4. 0

5. 3　　6. 449　　7. $\frac{9}{17}$　　8. $\frac{2}{3}$

二、计算题（每题 10 分，共计 20 分）

9. 解法一：

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\dots+\frac{1}{2020\sqrt{2019}+2019\sqrt{2020}}$$

$=\frac{2\sqrt{1}-\sqrt{2}}{(2\sqrt{1}+\sqrt{2})\times(2\sqrt{1}-\sqrt{2})}+\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}+\dots+\frac{2020\sqrt{2019}-2019\sqrt{2020}}{(2020\sqrt{2019}+2019\sqrt{2020})(2020\sqrt{2019}-2019\sqrt{2020})}$ （2 分）

$=\frac{2\sqrt{1}-\sqrt{2}}{1\times2}+\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2\times3}+\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{4}}{3\times4}+\dots+\frac{2020\sqrt{2019}-2019\sqrt{2020}}{2019\times2020}$ ……………………………（2 分）

$=\frac{\sqrt{1}}{1}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}-\dots+\frac{\sqrt{2019}}{2019}-\frac{\sqrt{2020}}{2020}$ ……………………………………（3 分）

$=1-\frac{\sqrt{2020}}{2020}$ ……………………………………………………………………………（2 分）

$=1-\frac{\sqrt{505}}{1010}$ ……………………………………………………………………………（1 分）

解法二：

$\because\frac{1}{(n+1)\cdot\sqrt{n}+n\cdot\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}+\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}$

$=\frac{1}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$ ……………………………………………………………（2 分）

$=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}}$

$=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ ……………………………………………………………………（2 分）

$\therefore\frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\dots+\frac{1}{2020\sqrt{2019}+2019\sqrt{2020}}$

$=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2019}}-\frac{1}{\sqrt{2020}}$ ………………………（3 分）

$=1-\frac{1}{\sqrt{2020}}$ …………………………………………………………………（2 分）

$=1-\frac{\sqrt{505}}{\sqrt{1010}}$ ……………………………………………………………………（1 分）

10. 解：当 $x\leq-2$ 时，原不等式可化为$\begin{cases}x\leq-2\\ \left|-\frac{2x+4}{3}-\frac{1-x}{2}\right|\leq2\end{cases}$ ………………………………1 分

即$-23\le x\le -2$ ……………………………………………………………………………2 分

当$-2<x\le 1$时，原不等式可化为$\begin{cases}-2<x\le 1\\ \left|\frac{2x+4}{3}-\frac{1-x}{2}\right|\le 2\end{cases}$……………………………………………………1 分

即$-2<x\le 1$……………………………………………………………………………2 分

当$x>1$时，原不等式可化为$\begin{cases}x>1\\ \left|\frac{2x+4}{3}-\frac{x-1}{2}\right|\le 2\end{cases}$ ……………………………………………………1 分

即x无解 ……………………………………………………………………………2 分

综上所述，$-23\le x\le 1$. ………………………………………………………………1 分

三、解答题（第 11-13 题每题 12 分，第 14 题 14 分，第 15 题 16 分）

11. 解：由题意得，$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)=0$………………（2 分）

$\therefore ab+ac+bc=\frac{0-\frac{1}{2}}{2}=-\frac{1}{4}$ ………………………………………………………（2 分）

$\therefore (ab+ac+bc)^2=a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2abc(a+b+c)$

$=a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=\frac{1}{16}$ ……………………………………………（3 分）

$\because (a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2\left(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\right)=\frac{1}{4}$ ……………………………（2 分）

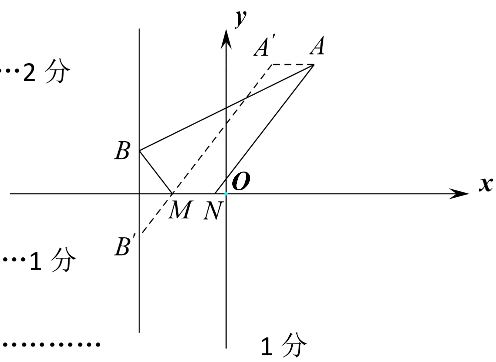
$\therefore a^4+b^4+c^4=\frac{1}{4}-2\times\frac{1}{16}=\frac{1}{8}$ ……………………………………………………………（3 分）

12. （1）解：由题意得$\triangle BCD\cong\triangle CAE$

当$BD=$CE，$CD=AE$ 时，$\begin{cases}y=2-x\\ x+2=3\end{cases}$ 即 $x=1$，$y=1$ ………………………………………1 分

当$CD=$CE，$BD=AE$ 时，即$x=0$，$y=3$. ………………………………………………1 分

（2）解：如图，过点A作x轴的平行线，并且在平行线上截取线段AA'，使得$AA'=1$，作点B关于x轴的对称点B'，连接$A'B'$，交x轴于点M，在x轴上截取线段$MN=1$，则此时四边形$ABMN$的周长最小. ……………………………………………………3 分



$\because A(2,3)$，$B(-2,1)$

$\therefore A'(1,3)$，$B'(-2,-1)$ ………………………………………2 分

设直线$A'B'$的表达式为$y=kx+b$

则$\begin{cases}k+b=3\\ -2k+b=-1\end{cases}$ ……………………………………3 分

$\therefore$ 直线$A'B'$的表达式为$y=\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$ ………………………………1 分

当$y=0$时，$x=-\frac{5}{4}$，即$M\left(-\frac{5}{4},0\right)$ ………………………………… 1 分

13. 解：设小明出生年份的个位数是x，十位数是y，则

（Ⅰ）若小明在 2000 年之后出生. ……………………………………………………（1 分）

$2017-(2000+10y+x)-2=2+0+x+y$ ……………………………………（3 分）

解得 $2x+11y=13$……………………………………………………………………（1 分）

$x=\frac{13-11y}{2}$

当 $y=1$ 时，$x=1$ 时符合题意，则小明今年的岁数是：2017-2011=6（周岁）………………（1 分）

（Ⅱ）若小明在 2000 年之前出生. ……………………………………………………（1 分）

$2017-(1900+10y+x)-2=1+9+x+y$……………………………………（3 分）

解得 $2x+11y=105$………………………………………………………………（1 分）

$x=\frac{105-11y}{2}$

当 y=9 时，x=3，则小明今年的岁数是：2017-1993=24（周岁）………………（1 分）

答：小明今年是 6 周岁或者 24 周岁.

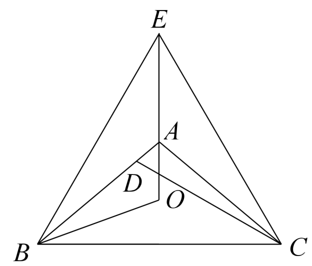
14. 证明：如图，以 BC 为边作等边三角形 BCE，连接 AE 可得 E、A、O 在同一直线上

$\because \angle A=100^\circ$，$AB=AC$，$O$ 是内心，

$\therefore \angle ABC=40^\circ$，$\angle ABO=\angle OBC=20^\circ$ ……………………………………3 分

$\because \angle EBC=60^\circ$

$\therefore \angle EBA=20^\circ$，$\angle EBO=40^\circ$. ……………………………………………3 分



$\because$△BCE 是等边三角形，

$\therefore BC=BE$

在△BOE 和△BDC 中

$$\begin{cases} BE=BC \\ \angle EBO=\angle CBD \\ BO=BD \end{cases}$$

$\therefore$△ $BOE\cong$△BDC ……………………………………………………………4 分

$\because EA$ 平分$\angle BEC$

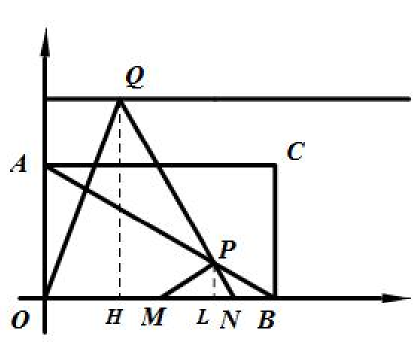
$\therefore \angle BEO=\angle CEO=30^\circ$ ……………………………………………………2 分

$\therefore \angle BCD=\angle BEO=30^\circ$ ……………………………………………………2 分

15. 解：过点 P、Q 作 $PL\perp x$ 轴于点 L，$QH\perp x$ 轴于点 H，

设 Q 点的横坐标为 m，

由题意得，M：($\frac{\sqrt{3}}{2}$,0)



∵∠ONQ=60°，∠ABO=30°，

∴∠BPN=∠NBP

∴PN=BN，

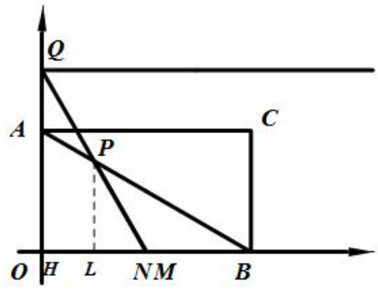
∴HN=$\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 N:($\frac{\sqrt{3}}{2}+m$,0)，BN=$\frac{\sqrt{3}}{2}-m$，

MN= $\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{m}-\frac{\sqrt{3}}{2}=m$…………………（2 分）

∴PB=$\sqrt{3}$ BN=$\frac{3}{2}-\sqrt{3}$m，…………………………………（2 分）

$PL=\frac{PB}{2}=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}m}{2}$，$LN=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{m}{2}$，$ML=MN-LN=\frac{3m}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\therefore PM=\sqrt{ML^2+PL^2}=\sqrt{3m^2-\frac{3\sqrt{3}m}{2}+\frac{3}{4}}$……………（2 分）



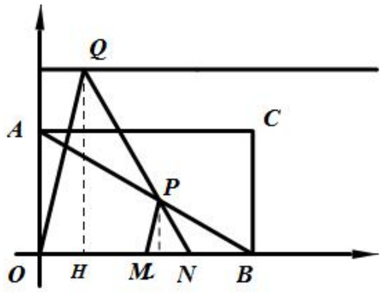
（Ⅰ）当 PM=BM 时，

$$\sqrt{3m^2-\frac{3\sqrt{3}m}{2}+\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$ ……………………（2 分）

解得 m=0 或 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

当 m=0 时，△BPM 与△BPN 重合仍满足条件，

当 $m=\frac{\sqrt{3}}{2}$时，P 点与 B 点重合，△BPM 不存在. ……………（1 分）



（Ⅱ）当 PM=PB 时，

$\sqrt{3m^2-\frac{3\sqrt{3}m}{2}+\frac{3}{4}}=\frac{3}{2}-\sqrt{3}m$ ………………………（2 分）

解得 $m=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ………………………（1 分）

（Ⅲ）当 BM=PB 时，$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}-\sqrt{3}m$………………………（2 分）

解得 $m=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$………………………（1 分）

综上所述，Q 点的坐标可以是（$0,\frac{3}{2}$），（$\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}$），（$\frac{\sqrt{3}-1}{2},0$）………………………………（1 分）